

Autoreferat

dr inż. Andrzej Zawadzki

Politechnika Świętokrzyska
Wydział Elektrotechniki,
Automatyki i Informatyki
aleja Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
25-314 Kielce

1. Imię i nazwisko

Andrzej Zawadzki

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

2001 uzyskanie stopnia naukowego doktora nauk technicznych:

Wydział Elektryczny, Politechnika Warszawska.

Dyscyplina: elektrotechnika.

Temat rozprawy doktorskiej: **Transformacja nieliniowych układów metodą geometrii różniczkowej.**

Promotor: prof. nzw. dr hab. Stanisław Krzemiński.

Recenzenci: prof. dr hab. Stanisław Osowski, prof. dr hab. Maciej Siwczyński.

1988 uzyskanie tytułu magistra inżyniera:

Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Politechnika Świętokrzyska.

Temat pracy magisterskiej: **Zależność obciążenia podstacji trakcyjnej od parametrów zasilanego odcinka trakcji.**

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

24.12.2018 – obecnie Politechnika Świętokrzyska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki, stanowisko: **adiunkt.**

01.06.2018 – 23.12.2018 Politechnika Świętokrzyska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki, stanowisko: **wykładowca.**

01.06.2015 – 31.05.2018 Politechnika Świętokrzyska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki, stanowisko: **starszy wykładowca.**

01.06.2001 – 31.05.2015 Politechnika Świętokrzyska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Katedra Energoelektroniki, stanowisko: **adiunkt.**

01.10.1998 – 31.05.2001 Politechnika Świętokrzyska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Katedra Energoelektroniki, stanowisko: **wykładowca.**

01.10.1989 – 30.09.1998 Politechnika Świętokrzyska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Instytut Elektrotechniki, stanowisko: **asystent.**

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

a) tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego:

Osiągnięcie naukowe stanowi autorska monografia pt.: „**Analiza wybranych liniowych obwodów elektrycznych z elementami niecałkowitego rzędu**”.

b) (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa, recenzenci wydawniczy):

Andrzej Zawadzki. Analiza wybranych liniowych obwodów elektrycznych z elementami niecałkowitego rzędu. 2019. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej.

Recenzenci wydawniczy:

prof. dr hab. inż. Krzysztof Latawiec.

Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Politechnika Opolska.

prof. nzw. dr hab. inż. Krzysztof Siwek.

Wydział Elektryczny, Politechnika Warszawska.

c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Od wielu lat duże zainteresowanie budzi podejście, polegające na stosowaniu rachunku niecałkowitego rzędu do rozwiązywania praktycznych problemów w fizyce, naukach technicznych, biofizyce, medycynie, ekonomii i innych dziedzinach. Pochodne niecałkowitego rzędu, zwane też różniczko-całkami, są uogólnieniem klasycznego podejścia do układów, które opisuje się za pomocą równań różniczkowych zawierających pochodne całkowitego rzędu. Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu, rozwijany intensywnie od strony aparatu matematycznego, znalazł jak dotąd nieliczne zastosowania w elektrotechnice teoretycznej, a zwłaszcza w teorii obwodów elektrycznych. Mimo że narzędzia stosowane w analizie są bardziej zaangażowane matematycznie i bardziej skomplikowane, niż w realizacji klasycznej, to jednak zastępowanie tradycyjnych modeli obwodowych przez modele wywodzące się z rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu prowadzi do wierniejszego opisu rzeczywistych elementów. Pojawienie się całkowicie nowych elementów i urządzeń elektrotechnicznych: superkondensatorów, rezystorów z pamięcią nazywanych „memrystorami” czy cewek indukcyjnych z efektem wypierania prądu (ang. Inductance with a skin effect) oraz cewek o ułamkowej indukcyjności wzajemnej stało się przyczyną wprowadzenia elementów niecałkowitego rzędu C_α i L_β jako pewnego uogólnienia elementów klasycznych.

Głównym obszarem zainteresowań naukowych autora są badania dotyczące zastosowania rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu w elektrotechnice, a zwłaszcza w teorii obwodów elektrycznych. Ponadto badania obejmują rozważania teoretyczne, obliczanie analityczne pochodnych i rozwiązywanie równań różniczkowych niecałkowitego rzędu.

Celem naukowym zawartym w monografii jest analiza wybranych liniowych obwodów elektrycznych z elementami niecałkowitego rzędu.

W pracy przedstawiono wybrane pojęcia zaczerpnięte z teorii rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu, zdaniem Autora, niezbędne do przeprowadzenia analizy układów elektrycznych niecałkowitego rzędu. Zamieszczone zostały podstawowe definicje pochodnych, w tym najbardziej rozpowszechnione: Riemanna-Liouville, Caputo, Grünwalda-Letnikowa (będąca rozszerzeniem definicji pochodnej wielokrotnej całkowitego rzędu dla

układów z czasem dyskretnym) i Riesz. Przedstawiono funkcje specjalne: gamkę Eulera $\Gamma(x)$, Mittag-Lefflera oraz hipergeometryczne Lommela i Whittakera, stosowane do wyznaczania analitycznych postaci pochodnych niecałkowitego rzędu. Pokazane zostały, metody opisu ciągłych układów dynamicznych niecałkowitego rzędu w tym: metoda przekształcania Laplace'a, transmitancja układu niecałkowitego rzędu, opis za pomocą równań stanu. Omówiono metody aproksymacji operatora różniczkowania niecałkowitego rzędu, tj. metodę CFE (*Continued Fraction Expansion*) i metodę Oustaloupa. Metody te posłużyły do sformułowania transformacji Laplace'a w postaci wielomianów rzędów całkowitych wykorzystanych między innymi do analizy stanów nieustalonych. Zakres monografii obejmuje analityczne rozważania dotyczące: elementów niecałkowitego rzędu w zakresie modeli oraz zależności matematycznych stosowanych do ich opisu, dla różnych sygnałów wymuszających i wybranych liniowych obwodów elektrycznych zawierających elementy niecałkowitego rzędu. Główny obszar badań dotyczył opisu rozważanych obwodów równaniami różniczkowymi niecałkowitego rzędu: zwyczajnymi (obwody z elementami $RL_\alpha C_\alpha$, w tym czwórniki i filtry) oraz cząstkowymi (linia długa). Celem badań uczyniono poszukiwanie analitycznych postaci rozwiązań takich równań oraz przeprowadzenie eksperymentów numerycznych potwierdzających poprawność uzyskanych wyników.

Do najważniejszych osiągnięć autor zalicza:

- analityczne wyznaczenie pochodnych Riemanna-Liouville'a i Caputo typowych sygnałów wymuszających występujących w obwodach i układach elektrycznych,
- podanie warunków zapewnienia spójności wymiarowej równań niecałkowitego rzędu,
- wprowadzenie koncepcji elementu uogólnionego niecałkowitego rzędu,
- zastosowanie rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu do analizy wybranych liniowych (ciągłych) obwodów elektrycznych, w tym: analityczne rozwiązanie stanów nieustalonych w obwodach z elementami niecałkowitego rzędu; analiza porównawcza własności czwórników i filtrów elektrycznych w realizacji klasycznej oraz z elementami niecałkowitego rzędu,
- analityczne rozwiązania równań telegrafistów w wersjach klasycznej oraz w reprezentacji z elementami niecałkowitego rzędu względem czasu, odległości i względem obydwu zmiennych,
- efektywne zastosowanie metody CFE oraz metody Oustaloup'a, do rozwiązania równań różniczkowych niecałkowitego rzędu (w tym równań różniczkowych cząstkowych) opisujących wybrane liniowe obwody elektryczne.

Opis osiągniętych wyników:

Na podstawie znajomości sygnału wymuszenia i sygnału odpowiedzi możliwe jest uzyskanie opisu dynamiki analizowanego obwodu czy systemu. Zakładając, że istnieją elementy niecałkowitego rzędu, ogólnie związek między sygnałem wymuszającym – wejściowym $x(t)$ a wyjściowym – odpowiedzią $y(t)$ można zapisać następująco:

$$y(t) = B \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \quad (1)$$

gdzie: B – stały współczynnik liczbowy.

W pracy wyznaczono odpowiedzi elementów obwodów elektrycznych gromadzących energię na różne rodzaje wymuszenia. Przedstawione zostały analityczne postacie pochodnych Riemanna-Liouville'a i Caputo typowych sygnałów wymuszających, tj. sygnału skokowego, sinusoidalnego i wykładniczego, w tym wektora wirującego.

Zakładając, że wymuszenie $x(t)$ dane jest w postaci skoku jednostkowego:

$$x(t) = U \cdot \mathbf{1}(t) \quad (2)$$

wyznaczono analityczne postacie odpowiedzi układu $y(t)$ jako pochodną wymuszenia. Stosując definicję Riemanna-Liouville'a, pochodna wymuszenia dla rzędu $\alpha = 0,5$ przyjmuje następującą formę:

$${}^{RL}D_t^{0,5} \mathbf{1}(t) = \frac{1}{\Gamma(0,5)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} = \frac{t^{-0,5}}{\Gamma(0,5)} \quad (3)$$

natomiast, korzystając z definicji pochodnej Caputo, pochodna niecałkowitego rzędu skoku jednostkowego ma postać:

$${}^C D_t^{0,5} \mathbf{1}(t) = \frac{1}{\Gamma(0,5-1)} \int_0^t \frac{\mathbf{1}^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^{0,5+1-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(-0,5)} \int_0^t \frac{\delta(\tau)}{(t-\tau)^{0,5}} d\tau = \frac{t^{-0,5}}{4\Gamma(1,5)} \quad (4)$$

Przyjmując do obliczenia funkcji gamma definicję Eulera oraz korzystając z tablic całek wyznaczono wartości funkcji gamma występujące w zależnościach (3) i (4). Wynoszą one odpowiednio: $\Gamma(0,5) = 1,7725$ oraz $\Gamma(1,5) = 3,5449$. Postępując podobnie, otrzymano wyrażenia określające pochodne dowolnego rzędu α .

Ponieważ najczęściej stosowanym sygnałem wejściowym obwodów elektrycznych jest prąd lub napięcie sinusoidalne, kolejnym etapem było wyznaczenie analitycznych postaci pochodnych niecałkowitego rzędu funkcji sinusoidalnej: $x(t) = A \sin(\omega t)$. Wykorzystując do obliczenia zależności (1) definicję Riemanna-Liouville'a, wyznaczona została odpowiedź układu dla pochodnej niecałkowitego rzędu $0 < \alpha < 1$ w następującej postaci:

$$y(t) = B {}^{RL}D_t^\alpha x(t) = \frac{AB}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \sin(\omega\tau) d\tau \quad (5)$$

natomiast stosując definicja Caputo otrzymano:

$$y(t) = B {}^C D_t^\alpha x(t) = \frac{AB}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = \frac{AB\omega}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \cos(\omega\tau) d\tau \quad (6)$$

Do wyznaczenia poszukiwanego rozwiązania skorzystano z funkcji Lommela [11] należących do rodziny funkcji hipergeometrycznych. Całkę w związku (5) zapisano w postaci wyrażenia:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \sin(\omega\tau) d\tau = \frac{(\omega t \alpha L1 - L2) \omega^{\alpha-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}}{(\alpha-1)} \quad (7)$$

gdzie: $L1 = LommelS1(1/2 - \alpha, 3/2, \omega t)$, $L2 = LommelS1(3/2 - \alpha, 1/2, \omega t)$.

Funkcja Lommela występująca w (7) zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$LommelSl(\mu, \nu, x) = \frac{x^{\mu+1}}{(\mu - \nu + 1) \cdot (\mu + \nu + 1)} {}_2F_1 \left(1, \frac{1}{2}(\mu - \nu + 3), \frac{1}{2}(\mu + \nu + 3), -\frac{1}{4}x^2 \right) \quad (8)$$

Występująca w (8) funkcja ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ jest funkcją hipergeometryczną definiowaną jako:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \cdot \frac{x^k}{k!} \quad (9)$$

gdzie: $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}(\mu - \nu + 3), \gamma = \frac{1}{2}(\mu + \nu + 3), x = -\frac{1}{4}x^2$, $(a)_k$ jest symbolem Pochhammera określonym regułą: $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$.

Zatem, funkcje w zależności (7) oznaczone przez $L1$ i $L2$ otrzymują postać:

$$L1 = \frac{(\omega t)^{1,5-\alpha}}{(-\alpha)(3-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1)_k (1-0,5\alpha)_k}{(2,5-0,5\alpha)_k 4^k k!} (\omega t)^{2k} \quad (10)$$

$$L2 = \frac{(\omega t)^{2,5-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1)_k (2-0,5\alpha)_k}{(2,5-0,5\alpha)_k 4^k k!} (\omega t)^{2k} \quad (11)$$

Podobnie jak dla przypadku pochodnej Riemanna–Liouville’a, postać analityczną całki we wzorze (6) dla pochodnej Caputo przedstawiono wyrażeniem:

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{t^{1-\alpha} \left[-1 + (\omega t)^{\alpha-0,5} L2 \right]}{(\alpha-1)} \quad (12)$$

W efekcie (po uwzględnieniu funkcji Lommela w postaci rozwiniętej), postać analityczna odpowiedzi (5) na wymuszenie sinusoidalne, dla pochodnej niecałkowitego rzędu $0 < \alpha < 1$ według definicji Riemanna – Liouville’a jest następująca:

$$y(t) = \frac{-AB\omega}{(\alpha-1) \cdot (3-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[(1-0,5\alpha)_k + \frac{(2-0,5\alpha)_k}{(2-\alpha)} \right] \frac{(-1)^k (2-\alpha+2k) \cdot (1)_k \omega^{2k} t^{1-\alpha+2k}}{4^k (2,5-0,5\alpha)_k k!} \right\}$$

natomiast postać analityczna odpowiedzi (6) według definicji Caputo dana jest zależnością:

$$y(t) = \frac{\omega AB t^{1-\alpha}}{(\alpha-1)\Gamma(1-\alpha)} \left[-1 + \frac{1}{(2-\alpha) \cdot (3-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1)_k (2-0,5\alpha)_k}{(2,5-0,5\alpha)_k 4^k k!} (\omega t)^{2k+2} \right]$$

Analogicznie wyznaczone zostały analityczne postaci pochodnych niecałkowitych rzędów dla wartości parametru α z przedziałów: $1 < \alpha < 2$ oraz $-1 < \alpha < 0$. Korzystając z otrzymanych zależności można wyznaczyć analityczne postaci pochodnych niecałkowitych rzędów z dowolnego przedziału $k-1 < \alpha < k$, dla dowolnego całkowitego k .

Kolejnym rozpatrywanym przebiegiem sygnału wymuszającego dla którego określono analityczne formy pochodnych niecałkowitego rzędu jest funkcja wykładnicza. W tym przypadku, używając definicji pochodnej niecałkowitego rzędu według Riemanna–Liouville, zapisano dla funkcji wykładniczej $f(t) = e^{-bt}$ następujące wyrażenie ($0 < \alpha < 1, k = 1$):

$${}^R L_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} e^{-b\tau} d\tau \quad (13)$$

natomiast dla pochodnej według definicji Caputo otrzymano:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t \frac{f^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = \frac{-b}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t \frac{e^{-b\tau}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (14)$$

Całki występujące w równaniach (13) i (14) określono za pomocą funkcji Whittakera z rodziny funkcji hipergeometrycznych i ostatecznie otrzymano analityczne formy pochodnych niecałkowitego rzędu funkcji wykładniczej dla rzędu $0 < \alpha < 1$ w postaci:

— według definicji Riemanna – Liouville:

$${}^R L_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{e^{-b} (bt)^{-\alpha-1}}{2b(\alpha-1)\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \left[\alpha \left(e^{\frac{bt}{2}} + e^{\frac{bt}{2}} \right) + b \left(t^{2\alpha+1} e^{\frac{bt}{2}} - b t e^{\frac{bt}{2}} \right) \right] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{(2-\alpha)_k k!} (bt)^k - 2 e^{\frac{bt}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{(2-\alpha)_k k!} (bt)^k \right\}$$

— według definicji Caputo:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{-b^\alpha e^{-b\left(1+\frac{t}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{(bt)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{(2-\alpha)_k k!} (bt)^k =$$

$$= \frac{-b^\alpha e^{-b\left(1+\frac{t}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{(bt)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \left[1 + \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)} (bt) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{(2-\alpha)_k k!} (bt)^k \right]$$

Prowadząc podobną analizę, wyznaczono wyrażenia na pochodne rzędów $-1 < \alpha < 0$.

Dla przypadku, gdy rozpatrywany sygnał (przedstawiony na płaszczyźnie zespolonej za pomocą wektora wirującego) dany jest funkcją $x(t) = U e^{j\omega t}$, wyznaczone postacie analityczne pochodnych niecałkowitego rzędu ($0 < \alpha < 1$) są następujące:

$${}^R L_0 D_t^\alpha f(t) = U t^{-\alpha} \left[-\frac{j\alpha}{\omega t \Gamma(1-\alpha)} \right] + U t^{-\alpha} \left[(j\omega t)^\alpha e^{j\omega t} \left\langle 1 - \alpha(1+\alpha) \frac{\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)}{\Gamma(1-\alpha)} \right\rangle \right] \quad (15)$$

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha) j U t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1) \cdot \Gamma(2-\alpha)} \cdot \left\{ \frac{(\alpha-1) \cdot (j\omega t - \alpha)}{\omega t} - j(j\omega t)^\alpha \cdot \right. \\ \left. \cdot e^{j\omega t} [1 + \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)] \right\} \quad (16)$$

Występujące w wyznaczonych związkach wyrażenie $\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)$ jest niekompletną funkcją gamma zdefiniowaną następująco:

$$\Gamma(\mu, x) = \int_0^{\infty} e^{-yt} t^{\mu-1} dt \quad (17)$$

W celu zobrazowania i porównania przedstawionych wyników obliczeń analitycznych dla pochodnych Riemanna–Liouville’a oraz Caputo przeprowadzono weryfikację numeryczną.

Istotnym, z fizycznego i inżynierskiego punktu widzenia jest zapewnienie spójności wymiarowej parametrów zawartych w równaniu różniczkowym niecałkowitego rzędu. Spójność tą, można zapewnić poprzez wprowadzenie nowego parametru σ o wymiarze sekundy w następujący sposób:

$$\left[\frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \right] = \frac{1}{s} = \left[\frac{d}{dt} \right], \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (18)$$

lub wprowadzając modyfikację wymiarową współczynników w równaniach:

$$u_L(t) = L_\alpha \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} \quad (19)$$

$$i_C(t) = C_\alpha \frac{d^\alpha u_C(t)}{dt^\alpha} \quad (20)$$

gdzie: L_α wyrażone jest w jednostkach: $\frac{H}{s^{k-\alpha}}$,

oraz C_α o wymiarze: $\frac{F}{s^{k-\alpha}}$.

Korzystając z własności pochodnej niecałkowitego rzędu autor, wprowadził koncepcję elementu uogólnionego niecałkowitego rzędu, przedstawionego równaniem:

$$u(t) = B \frac{d^\alpha i(t)}{dt^\alpha} \quad (21)$$

w którym – w zależności od wartości rzędu pochodnej α element B byłby dla:

- $\alpha = 0$ – rezystancją: $R = B$,
- $0 < \alpha < 1$ – indukcyjnością niecałkowitego rzędu: $L_\alpha = B$,
- $\alpha = 1$ – idealną cewką o indukcyjności: $L = B$,
- $\alpha = -1$ – idealnym kondensatorem o pojemności: $C = 1/B$,
- $-1 < \alpha < 0$ – pojemnością niecałkowitego rzędu: $C_\alpha = 1/B$.

Dla tak określonego elementu B w pracy zostały przedstawione interpretacje elementów niecałkowitego rzędu wraz z określeniem ich spójności wymiarowej. Dodatkowo, pokazano możliwość modelowania rzeczywistego elementu indukcyjnego i pojemnościowego reprezentowanego przez ich impedancje operatorowe, układem niecałkowitego rzędu. Przedstawiono model gałęzi RL , reprezentowaną elementem niecałkowitego rzędu o współczynniku:

$$L_\alpha = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega^\alpha}$$

i rzędzie:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

Analogicznie, dla gałęzi RC , wyznaczono wartość elementu pojemnościowego C_α oraz jego rząd α :

$$C_\alpha = \frac{1}{\omega^\alpha} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}; \quad \alpha = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\omega CR)$$

Okazuje się, że modele niecałkowitego rzędu dają możliwość zastąpienia elementu RL elementem L_α . Podsumowując, można powiedzieć, że podejście klasyczne jest przypadkiem szczególnym rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów – gdy: $\alpha = 1$.

Jako przykłady zastosowania rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu do analizy wybranych liniowych obwodów elektrycznych autor przedstawił w pracy rozważania obejmujące analizę stanów nieustalonych w obwodach zawierających indukcyjność L_α , pojemność C_α oraz rezystancję R . Badaniom poddano przypadki: załączania na napięcie stałe, rozładowanie obwodu z niezerowymi warunkami początkowymi oraz przerywania prądu w indukcyjności. Do analizy zastosowane zostało przekształcenie Laplace'a, przy czym sformułowanie transformat Laplace'a w postaci wielomianów rzędów całkowitych, uzyskano w oparciu metodę CFE. Zastosowanie metody CFE wiąże się koniecznością określenia rzędu aproksymacji metody. Stosując aproksymacje coraz wyższych rzędów intuicyjnie powinno się otrzymać rozwiązanie coraz dokładniejsze. Następuje to jednak kosztem rozbudowania obliczeń (wielomiany wyższych stopni a więc większa ilość biegunów). W publikacji [19] prowadzone były badania dokładności rzędu aproksymacji (jakości aproksymacji) dla odwrotnej transformaty Laplace'a niecałkowitego rzędu. Wykazano, że rząd optymalnej aproksymacji wynosi 5. Stosowanie aproksymacji wyższych rzędów nie jest wskazane, ponieważ wiąże się z żmudnymi obliczeniami a nie wnosi istotnej poprawy dokładności.

Przykładem praktycznego zastosowania rachunku niecałkowitego rzędu w obwodach rzeczywistych było wyznaczenie prądu wzbudzenia turbogeneratorsa. W klasycznej analizie pracy turbogeneratorsa pojawia się transformata prądu wzbudzenia zawierająca s w potęgę $\frac{1}{2}$. Stanowi to istotną trudność w wyznaczaniu transformaty odwrotnej. Pokazano, że zastosowanie rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu ułatwia wyznaczenie tej transformaty.

Analizę obwodu $RL_\alpha C_\alpha$ w stanie nieustalonym przeprowadzono rozwiązując równanie różniczkowe niejednorodne o stałych współczynnikach, rzędu 2α , następującej postaci:

$$L_\alpha C_\alpha D^{2\alpha} u(t) + C_\alpha R D^\alpha u(t) + u = e(t) \quad (22)$$

gdzie: α jest liczbą niecałkowitą (w ogólnym przypadku może być dowolną liczbą rzeczywistą)

Stosując przekształcenie Laplace'a, dla zerowych warunków początkowych i źródła napięcia stałego, otrzymano:

$$L_\alpha C_\alpha s^{2\alpha} U(s) + RC_\alpha s^\alpha U(s) + U(s) = \frac{E}{s} \quad (23)$$

skąd (po rozkładzie na ułamki proste) uzyskano napięcie na kondensatorze:

$$U(s) = \frac{E}{2L_\alpha C_\alpha \sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{s(s^\alpha - x_2)} - \frac{1}{s(s^\alpha - x_1)} \right] \quad (24)$$

$$\text{gdzie: } x_{1,2} = \frac{R}{2L_\alpha} \pm \sqrt{\Delta}, \text{ przy czym: } \Delta = \frac{R^2}{4L_\alpha^2} - \frac{1}{L_\alpha C_\alpha}.$$

Dokonując odwrotnego przekształcenia Laplace'a otrzymano napięcie w postaci zależnej od czasu:

$$u(t) = \frac{E t^\alpha}{2L_\alpha C_\alpha \sqrt{\Delta}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_2^k - x_1^k) t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \right] \quad (25)$$

Wyznaczono również analityczne postacie przebiegów czasowych napięcia na cewce i prądu w obwodzie $RL_\alpha C_\alpha$:

$$u_L(t) = E + \frac{E t^\alpha}{L_\alpha C_\alpha (x_1 - x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k} [(x_2 RC_\alpha + 1)x_2^k - (x_1 RC_\alpha + 1)x_1^k]}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \quad (26)$$

$$i(t) = \frac{E t^\alpha}{L(x_1 - x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k} (x_1^{k+1} - x_2^{k+1})}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \quad (27)$$

Jak można zauważyć, napięcie na kondensatorze, prąd i napięcie na cewce w obwodzie $RL_\alpha C_\alpha$ niecałkowitego rzędu wyrażone są związkami, w których występują szeregi funkcyjne nieskończone, charakteryzujące się zbieżnością asymptotyczną [17].

Dalsza część badań, dotycząca zastosowania rachunku niecałkowitego rzędu w obwodach elektrycznych, obejmowała analizę porównawczą własności czwórników w realizacji klasycznej oraz z elementami niecałkowitego rzędu. Rozważaniom poddano czwórniki typu T i typu II. W praktyce czwórniki bardziej złożone, można dzięki stosowaniu reguł łączenia doprowadzić do jednej z tych struktur. Kolejno dla czwórników z elementami niecałkowitego rzędu, udowodniono warunki odwracalności oraz wyznaczono operatorowe impedancje wejściowe, impedancje w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Przedstawiono parametry falowe: impedancję charakterystyczną oraz współczynnik przenoszenia. Zakres badań obejmował porównanie impedancji charakterystycznych dla czwórników z klasycznymi elementami ($\alpha = \beta = 1$) oraz z elementami niecałkowitego rzędu. Dokonano analizy wpływu elementów niecałkowitego rzędu na współczynniki tłumienia i fazowy. Badania udokumentowano licznymi wynikami eksperymentów numerycznych przeprowadzonych dla wybranych wartości parametrów α i β elementów niecałkowitego rzędu L_α i C_β rozpatrywanych czwórników. Pokazano, że rząd elementów niecałkowitych

wpływa na wartości impedancji charakterystycznej czwórników zarówno operatorowej jak i zespolonej (modułu impedancji i fazy). Zatem wnioskiem ogólnym jest stwierdzenie, że przedstawione badania wskazują na możliwość przybliżenia rzeczywistych czwórników, czwórnikami niecałkowitego rzędu

Rozważania dotyczące czwórników, stały się inspiracją do przeprowadzenia kolejnych badań przedstawionych w monografii, których obiektem były analogowe filtry elektryczne. Opisuje się je za pomocą funkcji przenoszenia w dziedzinie częstotliwości oraz odpowiedzi impulsowej w dziedzinie czasu (odpowieź na deltę Diraca). Pełny opis filtru wymaga użycia dwóch rzeczywistych funkcji częstotliwości: modułu $A(\omega)$ i kąta przesunięcia fazowego $\varphi(\omega)$, nazywanych odpowiednio charakterystyką amplitudową i charakterystyką fazową filtru. W pracy została przeprowadzona analiza porównawcza filtrów reaktancyjnych klasycznych oraz odpowiadających im filtrów z elementami niecałkowitego rzędu. Badaniom poddano filtry dolno-, górno- i pasmowo-przepustowe. Dla wszystkich filtrów pracujących w stanie jałowym wyznaczono analityczne postacie transmitancji napięciowej i wynikające z niej charakterystyki amplitudowe i fazowe. Jak zakłada klasyczna teoria filtrów reaktancyjnych, filtry te muszą pracować w stanie dopasowania falowego, dlatego też wyznaczono analityczne postacie współczynników tłumienia i fazowego w tym stanie pracy. W celu pokazania różnic, pomiędzy filtrami klasycznymi a odpowiadającymi im filtrami z elementami niecałkowitego rzędu, przeprowadzono szereg symulacji numerycznych. Zaprezentowano charakterystyki amplitudową i fazową oraz zależności współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego od pulsacji dla każdego z badanych filtrów.

Podsumowując, analiza teoretyczna i symulacyjna przedstawiona w pracy daje podstawę do stwierdzenia, że zastosowanie pojęć z rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu, umożliwia taką filtrację sygnałów, której właściwości nie są możliwe do uzyskania przy użyciu filtrów rzędów całkowitych. Przedstawione w pracy analityczne postacie transmitancji napięciowej, współczynników tłumienia i fazowego pozwalają na projektowanie i budowę filtrów z elementami niecałkowitego rzędu (superkondensatorami i cewkami niecałkowitego rzędu) oraz aplikacje takich rozwiązań w wielu dziedzinach interdyscyplinarnych [1].

Swoistego rodzaju obwodami elektrycznymi, zdefiniowanymi na pograniczu teorii obwodów i pola elektromagnetycznego są obwody o parametrach rozłożonych. Najczęściej rozważanym przykładem jest tu dwuprzewodowa linia przesyłowa, w której wymiar np. w kierunku osi x ($l > \lambda/4$) jest o wiele większy od wymiarów w pozostałych kierunkach. W ostatnich latach pojawiło się duże zainteresowanie cząstkowymi równaniami różniczkowymi niecałkowitego rzędu, opisującymi linię długą. Orsingher i Beghin [9] badali podstawowe rozwiązania równania telegrafistów rzędu 2α oraz rozpatrywali równanie dla rzędu $\alpha = m/n$ dla $m < n$. W swojej publikacji przedstawili koncepcję modelu linii długiej, w którym pochodne względem czasu są niecałkowitego rzędu. Inny przypadek, zastąpienia pochodnej względem zmiennej przestrzennej, pochodną niecałkowitego rzędu w sensie Riesz, rozpatrywano w publikacji [10]. Natomiast w pracy [8] zarówno pochodna względem odległości x jak i pochodna względem czasu t są niecałkowitych rzędów.

W prezentowanej pracy autor przedstawił badania pozwalające na modelowanie rzeczywistej (klasycznej) linii długiej, modelem niecałkowitego rzędu linii bezstratnej.

Zaprezentowane zostały analityczne rozwiązania równań telegrafistów w wersji klasycznej oraz w ujęciu z elementami niecałkowitego rzędu względem czasu, odległości i względem obydwu zmiennych. Do rozwiązania zastosowano metodę Fouriera (rozdzielania zmiennych). Rozważana była linia długa jednorodna i linearna.

Analizując klasyczne równanie telegrafistów, po wykonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymano:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = R_0 G_0 u(x,t) + (R_0 C_0 + G_0 L_0) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = G_0 R_0 i(x,t) + (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (28)$$

Wyznaczenia rozwiązania równań (28) poszukiwano (w myśl metody Fouriera) jako kombinacji funkcji zależnej od odległości i funkcji zależnej od czasu, w postaci:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{x_k}(x) \cdot U_{T_k}(t) \quad (29)$$

Wprowadzając wyrażenie (29) zapisane dla prądu i napięcia w następującej formie:

$$u(x,t) = U_x(x) \cdot U_T(t) \quad (30)$$

$$i(x,t) = I_x(x) \cdot I_T(t)$$

do równań (28), oraz ujednocając zmienne poprzez podstawienie, że: $V = [U \ I]^T$, uzyskano następującą ogólną postać:

$$\frac{1}{V_x} \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = R_0 G_0 + (R_0 C_0 + G_0 L_0) \frac{1}{V_T} \frac{\partial V_T}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{1}{V_T} \frac{\partial^2 V_T}{\partial t^2} \quad (31)$$

Pozwoliło to na zastąpienie równania, układem dwóch równań niezależnych, w których w jednym niewiadomą jest funkcja zależna tylko od zmiennej x , a w drugim - od zmiennej t . Ponieważ zmienne x i t mogą zmieniać się niezależnie w sposób zupełnie dowolny, równanie (31) będzie spełnione, jeżeli każdą stronę tego równania przyrównamy do pewnej stałej. Przyjmując stałą, jako $-A^2$ oraz dokonując odpowiednich przekształceń, otrzymano następujące równania:

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_x}{dx^2} + A^2 V_x = 0 \\ L_0 C_0 \frac{1}{V_T} \frac{d^2 V_T}{dt^2} + (R_0 C_0 + G_0 L_0) \frac{1}{V_T} \frac{d V_T}{dt} + R_0 G_0 + A^2 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Jako rozwiązanie równań (32) otrzymano następujące funkcje:

$$\begin{cases} V_x = M_1 e^{-Ax} + M_2 e^{Ax} \\ V_T = e^{-Ft} (N_1 \sin Dt + N_2 \cos Dt) \end{cases} \quad (33)$$

Występujące w równaniach (33) parametry: M_1 , M_2 , N_1 i N_2 są stałymi współczynnikami, natomiast F i D wynikają z rozwiązania równania charakterystycznego następującego równania:

$$a \frac{d^2 V_T}{dt^2} + b \frac{d V_T}{dt} + c V_T = 0 \quad (34)$$

Analiza wartości współczynników a , b , c danych zależnościami: $a = L_0 C_0$; $b = (R_0 C_0 + G_0 L_0)$; $c = R_0 G_0 + A^2$, pozwoliła na określenie wyróżnika równania kwadratowego jakim jest równanie charakterystyczne i pierwiastków zespolonych sprzężonych. Otrzymano, że:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0; p_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = -F \pm jD; D = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}; F = \frac{b}{2a}.$$

W związku z powyższymi zależnościami i równaniem (29), rozwiązaniem będą iloczyny szeregów ze współczynnikami, tak dobranymi aby były spełnione warunki brzegowe. Przyjmując wymuszenie linii w postaci sinusoidalnej, oraz biorąc pod uwagę, że fala rozprzestrzeniając się wraz z odległością ulega tłumieniu, założono następujące warunki brzegowe: $V_X(0) = 1$ oraz $V_T(0) = U \sin(\omega t)$.

Wynika stąd, że: $M_1 = 1$, $M_2 = 0$, $N_1 = U$, $N_2 = 0$, $D = \omega$.

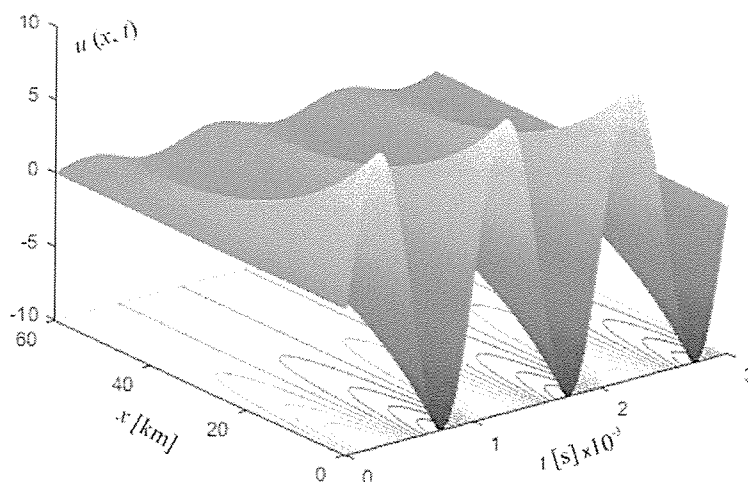
Na postawie warunku: $D = \omega$ wyznaczono wartość stałej A , która jest równa:

$$A = \sqrt{\frac{(R_0 C_0 + L_0 G_0)^2}{4L_0 C_0} + L_0 C_0 \omega^2 - R_0 G_0}$$

Ostatecznie, uzyskano rozwiązanie następującej postaci:

$$u(x, t) = e^{-Ax} U e^{-Ft} \sin Dt \quad (35)$$

Wizualizację rozwiązania przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Przebiegi uzyskane w wyniku rozwiązania klasycznego równania telegrafistów dla wymuszenia $u(0, t) = 10 \sin(2\pi 10^3) V$.

Dla równań różniczkowych rzędu niecałkowitego zapisanych względem odległości, oraz podobnie jak dla przypadku klasycznego ujednociając zmienne i wprowadzając stałą $-A^2$, otrzymano w efekcie układ:

$$\begin{cases} \frac{d^{2\alpha} V_X}{dx^{2\alpha}} + A^2 V_X = 0 \\ L_0 C_0 \frac{1}{V_T} \frac{d^2 V_T}{dt^2} + (R_0 C_0 + G_0 L_0) \frac{1}{V_T} \frac{d V_T}{dt} + R_0 G_0 + A^2 = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do pierwszego równania z układu (36), otrzymuje się:

$$V_X(s) = \frac{s^{2\alpha-1} V_X(0^+) + s^{2\alpha-2} V_X'(0^+)}{(s^{2\alpha} + A^2)} \quad (37)$$

Zakładając postać rozwiązania taką jak w przypadku równań klasycznych, więc w postaci: $V_X = e^{-Ax}$,

uzyskano następujące warunki brzegowe:

$$V_X(0) = 1 \text{ oraz: } \left. \frac{dV_X(x)}{dx} \right|_{x=0} = -A$$

Wprowadzając warunki brzegowe do (37), uzyskano rozwiązanie przedstawione wyrażeniem:

$$V_X(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^\gamma (s - A)}{s(s s^\gamma + A^2)} \right\} \quad (38)$$

W powyższym równaniu, jeżeli $\alpha > 0.5$ to: $2\alpha = 1 + \gamma$ i wówczas czynnik $s^{2\alpha} = s \cdot s^\gamma$, i tylko czynnik s^γ zastąpiono w myśl metody CFE ilorazem wielomianów:

$$s^\gamma \cong \frac{\sum_{k=0}^A P_{Ak}(\gamma) s^{A-k}}{\sum_{k=0}^A Q_{Ak}(\gamma) s^{A-k}} = \frac{N(\gamma, s)}{D(\gamma, s)}$$

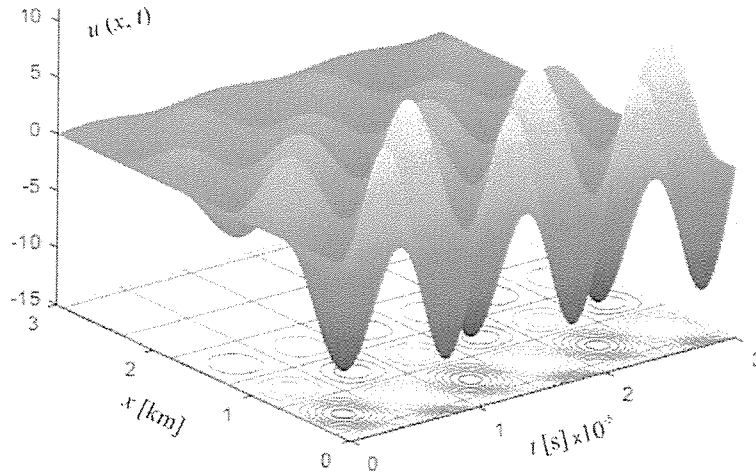
W związku z czym (38) zapisano w postaci:

$$V_X(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(\gamma, s)(s - A)}{s(sN(\gamma, s) + A^2 D(\gamma, s))} \right\} \quad (39)$$

Wyznaczając transformatę odwrotną otrzymano przebiegi $V_X(x)$ zależne od odległości. Następnie łącząc je z rozwiązaniem $V_T(t)$ (uzyskanym dla równań klasycznych) otrzymano ostatecznie, że:

$$u(x, t) = V_X(x) \cdot U e^{-Ft} \sin Dt \quad (40)$$

Wynik zilustrowano na rysunki 2.



Rys. 2. Przebiegi rozwiązania równania telegrafistów niecałkowitego rzędu linii bezstratnej względem odległości x .

Postępując analogicznie jak dla przypadku równań względem odległości x , zapisano równania telegrafistów niecałkowitego rzędu względem czasu t następująco:

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_X}{dx^2} - A^2 V_X = 0 \\ L_{0\alpha} C_{0\alpha} \frac{1}{V_T} \frac{d^{2\alpha} V_T}{dt^{2\alpha}} + (R_{0\alpha} C_{0\alpha} + G_{0\alpha} L_{0\alpha}) \frac{1}{V_T} \frac{d^\alpha V_T}{dt^\alpha} + R_{0\alpha} G_{0\alpha} - A^2 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Zapisując równania (41) w formie:

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_X}{dx^2} + A^2 V_X = 0 \\ a \frac{d^{2\alpha} V_T}{dt^{2\alpha}} + b \frac{d^\alpha V_T}{dt^\alpha} + c V_T = 0 \end{cases} \quad (42)$$

dla przypadku linii bezstratnej, dla której: $a = L_{0\alpha} C_{0\alpha}$, $b = 0$ oraz $c = A^2$, otrzymano następujące równanie niecałkowitego rzędu linii bezstratnej względem czasu:

$$a \frac{d^{2\alpha} V_T}{dt^{2\alpha}} + c V_T = 0 \quad (43)$$

Stosując przekształcenie Laplace'a, otrzymano:

$$V_T(s) = \frac{s^{2\alpha-1} a V_T(0^+) + s^{2\alpha-2} a V_T'(0^+)}{s^{2\alpha} a + c} \quad (44)$$

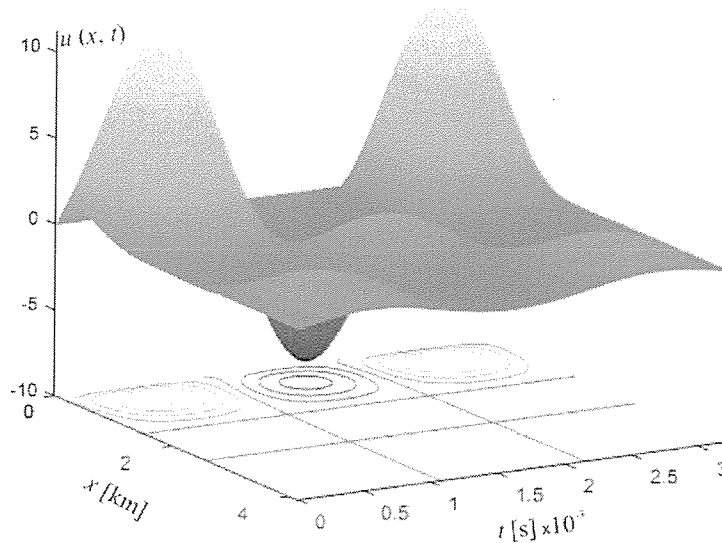
Zakładając wymuszenie na wejściu linii w postaci sinusoidalnej otrzymano kolejno następujące warunki brzegowe: $V_T(0) = 0$, $V_T'(t) = \omega U_m \cos(\omega t) \rightarrow V_T'(0) = \omega U_m$.

Stąd dla: $2\alpha - 1 = \gamma < 1$, postać czasowa będące rozwiązaniem, dana jest wyrażeniem:

$$V_T(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^\gamma a \omega U_m}{s^2 s^\gamma a + s A^2} \right\} \quad (45)$$

Do obliczenia transformaty odwrotnej zastosowano metodę Oustaloupa.

Wyznaczaną w ten sposób funkcję $V_T(t)$ i łącząc ją z rozwiązaniem $V_X(x)$ (uzyskanym dla równań klasycznych) otrzymano poszukiwane rozwiązanie, którego wizualizację przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Przebiegi rozwiązania równania telegrafistów niecałkowitego rzędu linii bezstratnej zapisanego względem czasu t .

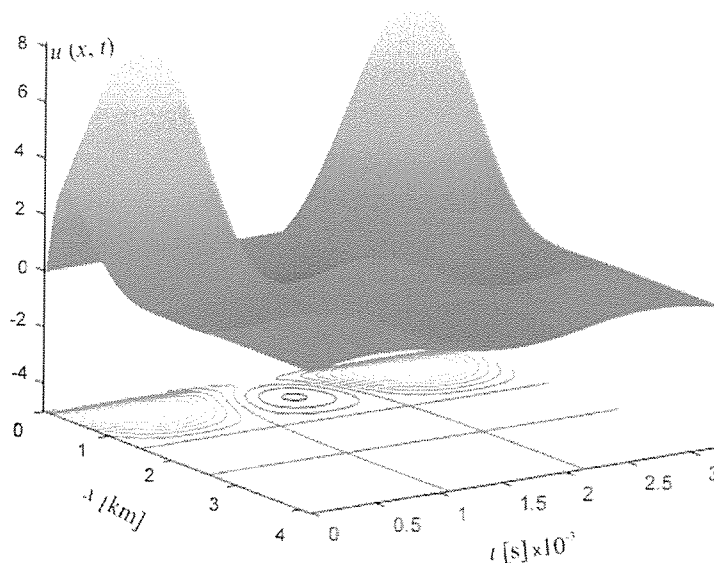
Równania telegrafistów niecałkowitego rzędu względem czasu i odległości, w postaci ogólnej po ujednoczeniu zmiennych są następujące:

$$\begin{cases} \frac{d^{2\beta} V_X}{dx^{2\beta}} - A^2 V_X = 0 \\ L_0 C_0 \frac{1}{V_T} \frac{d^{2\alpha} V_T}{dt^{2\alpha}} + (R_0 C_0 + G_0 L_0) \frac{1}{V_T} \frac{d^\alpha V_T}{dt^\alpha} + R_0 G_0 - A^2 = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Rozwiązaniem układu równań (46) jest, w myśl metody rozdzielania zmiennych zgodnie z równaniem (29), kombinacja liniowa rozwiązań uzyskanych dla linii bezstratnej względem odległości x (39) oraz względem czasu t (45) i przedstawiona następująca ogólną zależnością:

$$u(x, t) = V_X(x) \cdot V_T(t) \quad (47)$$

Na rysunku 4 przedstawiono wizualizację rozwiązania dla rzędu parametrów $\alpha = \beta = 0,9$.



Rys. 4. Przebiegi rozwiązania równania telegrafistów niecałkowitego rzędu linii bezstratnej zapisanego względem odległości x i czasu t .

Analiza otrzymanych przebiegów potwierdziła prawidłowość otrzymanych postaci analitycznych rozwiązań rozpatrywanych równań telegrafistów. Dla linii bezstratnej wprowadzenie elementów niecałkowitego rzędu powoduje występowanie znacznego i nierównomiernego tłumienia sygnału wzdłuż linii. Równania telegrafistów niecałkowitego rzędu w zależności od czasu można interpretować jako opis linii długiej z elementami niecałkowitego rzędu, natomiast w zależności od odległości – jako linii długiej niejednorodnej. Istotnym wnioskiem wynikającym z przeprowadzonych badań jest stwierdzenie, że równania telegrafistów niecałkowitego rzędu rozpatrywane jednocześnie względem czasu i odległości, w zależności od rzędu α (względem czasu) i β (względem odległości) mogą służyć do modelowania i interpretacji rzeczywistych zjawisk fizycznych występujących w niejednorodnych i stratnych liniach długich. Metoda rozdzielania zmiennych jest wysoce pomocna w implementacji i bardzo skuteczna w znajdowaniu zarówno przybliżonych rozwiązań, jak również rozwiązań analitycznych równań telegrafistów. Dzięki temu podejściu możliwe będzie lepsze zrozumienie przejściowych procesów w systemach elektrycznych i liniach przesyłowych. Uzyskane przebiegi mogą przedstawiać pracę w normalnych warunkach a także występowania sytuacji awaryjnych przy przesyłaniu sygnałów wysokich częstotliwości

Prezentowana w monografii problematyka stanowi nowy i interesujący rozdział badań zarówno od strony teoretycznej jak i aplikacyjnej. Przedstawione koncepcje nie wyczerpują jednak do końca problemu. Na rozwiązanie oczekują przypadki nieliniowych modeli układów elektrycznych. Przedmiotem dalszych badań będzie próba zastosowania rachunku niecałkowitego rzędu do układów opisanych nieliniowym równaniem stanu. Narzuca to konieczność zastosowania rachunku różniczkowego rzędu niecałkowitego w algebrze Liego, w której na szczególną uwagę zasługują pochodna kierunkowa i nawiasy Liego. Pochodna i całka dowolnych (niecałkowitych) rzędów otwierają wiele możliwości w dziedzinie identyfikacji układów, tworzenia nowych, nieosiągalnych wcześniej możliwości analizy.

Zastosowanie w procesie analizy rachunku rzędu niecałkowitego otwiera nowe możliwości uzyskania modelu dokładniej odzwierciedlającego obiekty rzeczywiste.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych (artystycznych).

Równolegle do badań przedstawionych w monografii, autor kontynuował rozpoczęte w ramach doktoratu prace dotyczące zastosowania metod geometrii różniczkowej do linearyzacji dynamicznych układów nieliniowych opisanych w przestrzeni stanu. Prowadzone badania obejmują transformację równań nieliniowych w liniowe poprzez linearyzację zapewniającą równoważność lokalną dynamiki układu. Linearyzacja taka umożliwia przedstawienie układów nieliniowych za pomocą ich liniowych modeli powstałych w wyniku działania transformacji linearyzującej - transformującej układ przez zmianę współrzędnych (zmiennych stanu) w przestrzeni stanu oraz przy użyciu zmiany współrzędnych i dodatkowo wprowadzonego sprzężenia zwrotnego. Zmiana taka polega na algebraicznej zamianie oryginalnych zmiennych stanu, na nowe zmienne ale przedstawione już w nowej przestrzeni stanu. Pozwala ona na prowadzenie analizy powstałych modeli zlinearyzowanych przy zastosowaniu metod znanych z teorii układów liniowych, a następnie korzystając z transformacji odwrotnej na przeniesienie rezultatów na układ nieliniowy. Osiągnięcia wynikające z prowadzonych w tym zakresie badań zostały potwierdzone publikacjami w renomowanych czasopismach (indeksowanych według bazy JCR). W pracach [22, 25] przedstawiono rozwiązanie problemu linearyzacji wejście-stan aktywnego obwodu elektrycznego ze sterowanymi źródłami o nieliniowych współczynnikach sterowania oraz wybranej klasy nieliniowych generatorów. Do wyznaczenia postaci analitycznej rozwiązania, zastosowano metodę rektyfikacji lokalnego układu współrzędnych. Analizę porównawczą metod wyznaczania transformacji linearyzujących nieliniowe równania stanu układu (wejście-stan układu nieliniowego) oraz przedstawienie warunków, jakie musi spełniać układ nieliniowy aby możliwe było przeprowadzenie zabiegów linearyzujących zamieszczono w pracy [23]. Układy, które nie dają się zlinearyzować, a jedynie transformują się do układów quasiliniowych były przedmiotem publikacji [13, 14, 20, 24]. Zadanie w tym przypadku polegało na wyznaczeniu transformacji obejmującej: zmianę współrzędnych w przestrzeni stanu i znalezienia sprzężenia zwrotnego, które łącznie linearyzują układ nieliniowy. Obiektami badań były wielowymiarowe obwody elektryczne (SISO i MIMO).

Kolejnym obszarem zainteresowań naukowych autora jest elektrotechnika samochodowa. Tematyka badań skupia się na dwóch związanych ze sobą zagadnieniach: układach zapłonowych oraz analizie symptomowych modeli wyposażenia elektrycznego pojazdów samochodowych.

Pierwsze z nich dotyczy modelowania układów zapłonowych silników spalinowych o zapłonie iskrowym. Problem ten jest szczególnie aktualny w obliczu wzrastających wymagań związanych z ekologią. Wynika stąd konieczność dogłębnej analizy zjawisk fizycznych, występujących w stosowanych układach zapłonowych. Prowadzone badania obejmują rozważania teoretyczne związane z opisem matematycznym modeli układów zapłonowych, badania laboratoryjne obiektów rzeczywistych i symulacje numeryczne. Autor współuczestniczył w badaniach, których wynikiem były prace publikowane w czasopismach i przedstawiane na konferencjach naukowych. W pracach [15, 16, 21] zamieszczono wyniki

badania eksperymentalnych i opis matematyczny elementów układu zapłonowego. Uzupełniono w nich model układu zapłonowego, poprzez zastosowanie w analizie jego pracy układu o parametrach rozłożonych, reprezentującego przewód zapłonowy. Możliwość traktowania przewodu zapłonowego jako układu o parametrach rozłożonych potwierdzono wynikami eksperymentów laboratoryjnych, przeprowadzonych dla wybranych typów przewodów. Stwierdzono, że konstruując układy zapłonowe należy zadbać, aby impedancja odbiornika (świecy zapłonowej) była równa impedancji falowej przewodu zapłonowego. Otrzymane wyniki dają również podstawę do rozważań związanych z konstrukcją świecy zapłonowej, jej współpracą z układem zapłonowym oraz wpływem na energię wyładowania iskrowego. Takim badaniom poświęcono pracę [12]. W pracy [18] przedstawiono opis zjawisk zachodzących w układach zapłonowych z wykorzystaniem rachunku niecałkowitego rzędu. Przeprowadzona analiza, poparta eksperymentem pokazała, że takie podejście pozwala modelować rzeczywiste procesy fizyczne zachodzące w układach zapłonowych.

Drugie zagadnienie obejmuje diagnostykę stanu technicznego wyposażenia elektrycznego pojazdów samochodowych. Początkowo zakres badań dotyczył układu zasilania elektrycznego pojazdu, a podstawą analizy była macierz diagnostyczna, w której wiersze odwzorowywały sygnały symptomowe, a kolumny – uszkodzenia. Analizowano różne podejścia do modelowania ich współzależności. W pracy [6] na podstawie badań na obiekcie rzeczywistym zdefiniowano macierz diagnostyczną, a seria uzyskanych pomiarów laboratoryjnych posłużyła do opracowania sieci neuronowej. W publikacjach [2, 3, 4] rozszerzono podejście na pozostałe elementy wyposażenia elektrycznego pojazdu. Opracowano ogólny schemat diagnozowania obwodów elektrycznych. Zbudowano diagnostyczne modele symptomowe w postaci odpowiednich binarnych tablic wiążących sygnały symptomowe z uszkodzeniami. Przedstawiono zbiór uszkodzeń wraz z odpowiednimi sygnałami symptomowymi, w oparciu o które zbudowano binarną macierz diagnostyczną. Wykonano symulacje komputerowe diagnozowania uszkodzeń elementów z zastosowaniem modeli neuronowych oraz neuronowo-rozmytych. W kolejnych pracach [5 i 7] skupiono się na problematyce rozróżnialności uszkodzeń, sygnalizowanych przez zbliżone zestawy symptomów. Badano rozróżnialność uszkodzeń zależną od: złożoności struktury, wyboru odpowiednich sygnałów diagnostycznych, niepewności utrudniającej wnioskowanie oraz dynamiki ich powstawania. Opracowano strukturę algorytmu oraz jego realizację w postaci programu komputerowego analizującego rozróżnialność uszkodzeń na podstawie macierzy binarnej i informacyjnej. Wykazano, że wprowadzenie modeli neuronowych oraz neuronowo-rozmytych może posłużyć do zautomatyzowania procesów diagnostycznych.

Niezależnie od działalności naukowej, autor od wielu lat intensywnie współpracuje z krajowymi i zagranicznymi przedsiębiorstwami przemysłowymi. Brał czynny udział w budowie, organizacji i procesie akredytacyjnym Laboratorium Elektrotechniki Pojazdowej Politechniki Świętokrzyskiej. Obecnie laboratorium to posiada akredytację Polskiego Centrum Akredytacji (nr AB 117) oraz notyfikację Komisji Europejskiej. Autor, jako zastępca kierownika, jest odpowiedzialny za system zarządzania Laboratorium zgodny z normą PN-EN ISO/IEC 17025. Jako członek zespołu wykonuje badania wyrobów oraz elementów wyposażenia elektrycznego i elektronicznego pojazdów w zakresie: parametrów elektrycznych, właściwości fizycznych i kompatybilności elektromagnetycznej. Badania te są podstawą udzielenia homologacji typu wyrobu w oparciu o wybrane Regulaminy EKG ONZ

i dyrektywy KE oraz oceny zgodności z wymaganiami szeregu aktów normatywnych. Dodatkowo we współpracy z producentami angażuje się w procesy projektowania, testowania prototypów i doskonalenia wybranych wyrobów.

Obok monografii, w której zawarto wyniki badań dotyczących analizy wybranych liniowych obwodów elektrycznych z elementami niecałkowitego rzędu, autor opublikował w tym obszarze także: 8 prac w recenzowanych czasopismach, 3 rozdziały w monografiach oraz zaprezentował wyniki badań na 8 konferencjach.

Podsumowując osiągnięcia naukowo-badawcze po uzyskaniu stopnia doktora autor może wskazać:

1. Publikacje w czasopismach indeksowanych według bazy JCR: ogółem 9,
(w tym wymienione w wykazie MNiSzW (część A): ogółem 7).
Czasopisma:
 - Mathematical Problems in Engineering,
 - International Journal of Control, Automation, and Systems,
 - Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences,
 - Journal of Electrical Engineering,
 - Electrical Engineering,
 - COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering,
 - Lecture Notes in Artificial Intelligence, Artificial Intelligence and Soft Computing.
2. Publikacje w czasopismach krajowych: ogółem 12.
Czasopisma:
 - Przegląd Elektrotechniczny,
 - Pomiary Automatyka Kontrola,
 - Logistyka,
 - Diagnostyka,
 - Prace naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka,
 - Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej. Elektryka.
3. Publikacje w monografiach (rozdziały): ogółem 6.
4. Publikacje w materiałach konferencyjnych: ogółem 21.
Konferencje:
 - Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE),
 - International Conference on Fundamentals of Elektrotechnics and Circuit Theory - IC-SPETO,
 - International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET,
 - Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice ZKwE,
 - "Automobile & Technosphere" ICATS,
 - Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów DIAG,
 - IFAC Symposium on "Advances in Automotive Control".
5. Projekty badawcze: ogółem: 3.

- „Modele matematyczne do diagnostyki i identyfikacji parametrów urządzeń elektrycznych wyposażenia pojazdów”, (8T 10AO4315); realizacja lata: 2000 ÷ 2003;
 - „Opracowanie metod i modeli do budowy projektu inteligentnego komputerowego systemu diagnozowania elektrycznych i elektronicznych urządzeń wyposażenia pojazdów”, (4T 10A07224); realizacja lata: 2003 ÷ 2006;
 - „Metoda monitorowania decyzyjnego stanu obiektów technicznych”, (N N510 468136); realizacja lata: 2008 ÷ 2012.
6. Uczestnictwo w programach europejskich: ogółem: 1.
- „ELEKTROLAB”. Rozbudowa laboratoriów dydaktyczno-badawczych WEAiI Politechniki Świętokrzyskiej obejmująca zakup aparatury dla potrzeb elektroniki przemysłowej, biomedycznej i energoelektroniki”, (UDA-RPSW.02.01.00-26-008/11-00), realizacja lata: 2012 ÷ 2013.
7. Wykonane badania i opinie techniczne na zamówienie podmiotów gospodarczych: ponad 550 opracowań zbiorowych (w ramach działalności Laboratorium Elektrotechniki Pojazdowej).

Baza Web of Science Core Collection indeksuje 9 publikacji, które są cytowane 15 razy; Index H jest równy 2.

Baza Scopus indeksuje 12 publikacji, które są cytowane 39 razy; Index H jest równy 4.

Baza Google Scholar indeksuje 20 publikacji, które są cytowane 57 razy; Index H jest równy 5,

Publish or Perish indeksuje 30 publikacji, które są cytowane 76 razy; Index H jest równy 5.

Sumaryczny Impact Factor dla publikacji w czasopismach z listy JCR zgodnie z rokiem opublikowania: **IF = 5,839**.

Szczegółowy wykaz dorobku naukowo-badawczego po uzyskaniu stopnia doktora zamieszczono w załączniku nr 3.

Bibliografia.

- [1] Elwakil A.S. Fractional-Order Circuits and Systems: An Emerging Interdisciplinary Research Area. IEEE Circuits Syst. Mag. 10, 40–50, 2010.
- [2] Gad S., Jastriebow A., Łaskawski M., Słoń G., Zawadzki A., Symptomowe modele diagnozowania samochodowych urządzeń elektrycznych. V Krajowa Konferencja Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów DIAG'2003.
- [3] Gad S., Łaskawski M., Słoń G., Jastriebow A., Zawadzki A., Fuzzy-Neural Networks in the Diagnosis of Motor-Car's Current Supply Circuit. Rutkowski L., Siekmann J., Tadeusiewicz R., Zadeh L.A. (Ed.): Artificial Intelligence and Soft Computing, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 3070, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg - New York, pp: 296-301, 2004.
- [4] Gad S., Łaskawski M., Słoń G., Jastriebow A., Zawadzki A., Symptom models of diagnostic of motor-car electrical equipment. Proc. of First IFAC Symposium on

- "Advances in Automotive Control" IFAC AAC 04, str.: 422-427, Salerno 2004.
- [5] Jastriebow A., Gad S., Słoń G., Zawadzki A., Łaskawski M., Analiza rozróżnialności uszkodzeń przy diagnozowaniu samochodowych urządzeń elektrycznych. *Diagnostyka VOL. 32*, str.: 135-138, 2004.
- [6] Jastriebow A., Gad S., Słoń G., Zawadzki A., Pawlak M., Sygnały diagnostyczne w diagnozowaniu wyposażenia elektrycznego samochodów. *Diagnostyka VOL. 32*, str.: 139-142, 2004.
- [7] Jastriebow A., Gad S., Słoń G., Zawadzki A., Rozróżnialność uszkodzeń przy komputerowej diagnostyce wyposażenia elektrycznego samochodu. *Mat. IX Konferencji Naukowo – Technicznej, Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice, ZKwE'2004, Tom II*, str.: 603-606. Poznań/Kiekrz 2004,
- [8] Kaczorek T., Rogowski K. *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej. Białystok, 2014.
- [9] Orsingher E., Beghin L. Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with Brownian time. *Probab. Theory Relat. Fields* 128, pp. 141–160, 2004.
- [10] Orsingher E., Zhao X. The space-fractional telegraph equations and The related fractional telegraph processes. *Chin. Ann. Math.* 24B:1 pp. 45-56, 2003.
- [11] Paszkowski S. *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, PWN, Warszawa, 1975.
- [12] Różowicz S., Tofil Sz., Zawadzki A. Energia wyładowania iskrowego świecy zapłonowej przy różnym stężeniu zanieczyszczenia paliwa. *Prace Szkoły Inżynierii Materiałowej*. str.: 307-312, 2015.
- [13] Różowicz S., Zawadzki A. Input-output transformation using the feedback of nonlinear electrical circuits. Algorithms and linearization examples. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018 (1-4), 2018, ISSN 1024-123X, doi: 10.1155/2018/9405256.
- [14] Różowicz S., Zawadzki A. The use of differential geometry methods for linearization of nonlinear electrical circuits with multiple-inputs and multiple-outputs (MIMO), *Electrical Engineering*. Vol.100(4), 2018, pp.2815-2824, ISSN 0948-7921, doi: 10.1007/s00202-018-0746-0.
- [15] Różowicz S., Zawadzki A. Weryfikacja eksperymentalna propagacji sygnału w przewodach zapłonowych silników spalinowych XXXX Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów SPETO 2018, str.: 39-40, 2018.
- [16] Różowicz S., Zawadzki A. Przewody zapłonowe silników spalinowych jako obwody o parametrach rozłożonych. XXXIX Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów SPETO 2017, str.: 41-42, 2017.
- [17] Ryżyk I.M., Gradsztejn I.S. *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN Warszawa, 1964.
- [18] Włodarczyk M., Zawadzki A, Różowicz S. Fractional models of selected combustion engine ignitron systems. *Przegląd Elektrotechniczny; R92, Vol 4/2016*, str.: 30-33, 2016. doi:10.15199/48.2016.04.08.
- [19] Zawadzki A., Włodarczyk M. Analiza jakości aproksymacji odwrotnej transformaty Laplace'a ułamkowego rzędu metodą CFE. XXXVIII Międzynarodowa Konferencja

- z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów IC-SPETO 2015, str.45-46, 2015.
- [20] Zawadzki A, Różowicz S. Application of input–state of the system transformation for linearization of selected electrical circuits. Journal of Electrical Engineering. Tom: 67/3, pp. 199-205, 2016. ISSN: 1335-3632.
- [21] Zawadzki A., Różowicz S.: Badania elementów układu zapłonowego jako obwodu o stałych rozłożonych, XXXIX Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów SPETO 2016, str.: 51-52, 2016.
- [22] Zawadzki A., Różowicz S. Application of Input–State of the System Transformation for Linearization of Some Nonlinear Generators. International Journal of Control, Automation, and Systems 13/3, pp. 626-633, 2015. ISSN: 1598-6446.
- [23] Zawadzki A. Analiza porównawcza metod wyznaczania transformacji linearyzujących nieliniowe równania stanu układu. Przegląd Elektrotechniczny NR 4/2014, str.: 28-33, 2014.
- [24] Zawadzki A., Transformacja wejście–wyjście układu nieliniowego przez sprzężenie zwrotne metodą geometryczną. Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Elektryka 41, str.: 163-172, 2004.
- [25] Zawadzki A. Application of local coordinates rectification in linearization of selected parameters of dynamic nonlinear systems. COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. 33/5, pp.: 1819-1830, 2014. ISSN: 0332-1649.

Andrzej Zawadzki.